

RAPPEL : SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

I SUITES ARITHMÉTIQUES

1 DÉFINITION

Une suite (u_n) est **arithmétique** si chaque terme s'obtient **en ajoutant** au précédent un **même** nombre réel constant r .

C'est à dire, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$

Le réel r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

2 MÉTHODE : PROUVER QU'UNE SUITE EST ARITHMÉTIQUE

Pour **démontrer** qu'une suite est **arithmétique**, il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour vérifier que la différence $u_{n+1} - u_n$ est **constante**.

Cette **constante** est alors la **raison** de la suite arithmétique.

3 PROPRIÉTÉ 1 : SENS DE VARIATION D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r \geq 0$ alors la suite (u_n) est **croissante**
- Si $r \leq 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante**
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est **constante**

4 PROPRIÉTÉ 2 : EXPRESSION DE (u_n) EN FONCTION DE n

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r .

- Si le premier terme de la suite est u_0 alors pour tout entier n , $u_n = u_0 + n \times r$
- Si le premier terme de la suite est u_1 alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$
- Si le premier terme de la suite est u_p alors pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p) \times r$

EXEMPLE :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = -1$

1. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

Solution :

D'après la propriété 2 précédente, on a : $u_n = u_0 + n \times r$ d'où en remplaçant par les valeurs numériques :

$$u_n = -1 + n \times \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}n.$$

2. Calculer u_{12} .

Solution :

Avec l'expression précédente, on remplace n par 12 soit : $u_{12} = -1 + \frac{1}{4} \times 12 = 2$.

II SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Une suite (u_n) est **géométrique** si chaque terme s'obtient **en multipliant** le précédent par un **même** nombre réel constant q .

C'est à dire, pour tout entier n , $u_{n+1} = qu_n$

Le réel q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

2 ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2000 € est placé **au taux d'intérêt composé** de 1,5% par an.

On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \times C_n = 1,015 \times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,015$.

2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2016, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.

On note r_n la quantité de rejets l'année 2016 + n d'où :

$$r_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times r_n = 0,96 \times r_n$$

Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

3 MÉTHODE : PROUVER QU'UNE SUITE EST GÉOMÉTRIQUE

Pour **démontrer** qu'une suite est **géométrique**, il suffit de calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour vérifier que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est **constant**.
 Cette **constante** est alors la **raison** de la suite géométrique.

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%).

Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?

Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0,96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2026 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

4 PROPRIÉTÉ 1 : EXPRESSION DE (u_n) EN FONCTION DE n

Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q .

- Si le premier terme de la suite est u_0 alors pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$
- Si le premier terme de la suite est u_1 alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Si le premier terme de la suite est u_p alors pour tout entier n et pour tout entier p , $u_n = u_p \times q^{n-p}$